CGANT JMA
http://www.jcgantunej.or.id
Volume 2, No 1, 2021
DOI:
10.25037/cgantjma.v2i1.48

Journal of
MATHEMATICS AND APPLICATIONS

e-ISSN 2722-7774

Metric Dimension dan *Non-Isolated Resolving Number* pada Beberapa Graf

Wahyu Nikmatus Sholihah[1,2], Dafik[1,3], Kusbudiono[1,2]
[1]CGANT Research Group - University of Jember
[2]Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember
[3]Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember
nikmatus98@gmail.com, d.dafik@unej.ac.id

Abstract

Let $G = (V, E)$ be a set of ordered set $W = \{W_1, W_2, W_3, ..., W_k\}$ from the set of vertices in connected graph G. The metric dimension is the minimum cardinality of the resolving set on G. The representation of v on W is k set. Vector $r(v|W) = (d(v, W_1), d(v, W_2), ...,$ $d(v, W_k))$ where $d(x, y)$ is the distance between the vertices x and y. This study aims to determine the value of the metric dimensions and dimension of *non-isolated resolving set* on the wheel graph (W_n). Results of this study shows that for $n \geq 7$, the value of the metric dimension and *non-isolated resolving set* wheel graph (W_n) is $dim(W_n) = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ and $nr(W_n) = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$. The first step is to determine the cardinality vertices and edges on the wheel graph, then determine W, with W is the resolving set G if *vertices* G has a different representation. Next determine *non-isolated resolving set*, where W on the wheel graph must have different representations of W and all x elements W is connected in W.

Keywords : metric dimension, non-isolated resolving set, resolving set, whell graph
Mathematics Subject Classification: 05C50

Pendahuluan

Pendahuluan Pada tahun 1736 lahirlah teori graf melalui makalah tulisan seorang ahli matematikawan berasal dari Swiss yang bernama Leonhard Euler. Euler berhasil memecahkan tekateki masalah jembatan Konigsberg yang sangat terkenal. Konigsberg adalah suatu kota di Prussia bagian Timur Jerman. Permasalahan yang muncul yaitu bagaimana cara seseorang berpindah dari satu tempat ke tempat lain dengan melewati setiap jembatan tepat satu kali. Euler memformulasikan masalah tersebut ke dalam teori graf.

Teori graf memiliki kajian yang cukup menarik untuk dipelajari, salah satunya yaitu dimensi metrik (*metric dimension*). Dimensi metrik pertama kali diperkenalkan oleh Slater pada tahun 1975 yang kemudian dikembangkan lagi oleh Harary dan Melter pada tahun 1976. Dimensi metrik itu sendiri adalah kardinalitas terkecil dari himpunan pembeda. Suatu graf G didefinisikan sebagai pasangan terurut himpunan $(V(G), E(G))$ dimana $V(G)$ merupakan sebuah himpunan berhingga tak kosong dari titik (*vertex*), sedangkan $E(G)$ adalah sebuah himpunan sisi (*edge*) yang menghubungkan dua buah titik yang sisinya berbentuk garis lurus atau lengkung [6].

Dimensi metrik adalah kardinalitas minimum himpunan pembeda (*resolving set*) pada G. Untuk *vertices* u dan v dalam graf terhubung G, jarak $d(u, v)$ adalah panjang dari lintasan terpendek antara u dan v pada G. Untuk himpunan terurut $W = W_1, W_2, W_3, ..., W_k$

dari *vertices* dalam graf terhubung G dan *vertex* r pada G adalah vektor-k (pasangan k-tuple), menunjukan representasi dari$v$ pada W. Himpunan W dinamakan himpunan pembeda (*resolving set*) G jika *vertices* G mempunyai representasi berbeda. Himpunan *resolving* dengan kardinalitas minimum disebut himpunan *resolving* minimum dan kardinalitas tersebut menyatakan dimensi metrik dari G yang dinotasikan dengan $dim(G)$ [2].

Sebuah himpunan pembeda W pada graf G dikatakan himpunan pembeda tak terisolasi (*non-isolated resolving set*) jika subgraf W diinduksi oleh titik (simpul) tak terisolasi. Kardinalitas minimum dari himpunan pembeda tak terisolasi pada suatu graf dikatakan *non-isolated resolving number* yang dinotasikan dengan $nr(G)$ [1]. Peneliti akan mengembangkan teori dimensi metrik pada beberapa graf khusus, yaitu graf tumpukan buku $(B_{4,n})$, graf gear (G_n) dan graf $shack(H_2^2, e, n)$.

Observasi 1. *Misal $dim(G)$ dan $nr(G)$ adalah nilai dimensi metrik dan non-isolated resolving set pada graf terhubung G, maka nilai $nr(G) \geq dim(G)$.*

Bukti. Nilai $dim(G)$ merupakan kardinalitas minimum himpunan pembeda pada G. Sedangkan $nr(G)$ merupakan himpunan pembeda minimum $(dim(G))$ dengan syarat semua himpunan pembedanya harus saling terhubung. Sehingga syarat dari $nr(G)$ lebih kompleks dari $dim(G)$, dengan demikian $nr(G) \geq dim(G)$.

Hasil Penelitian

Dari hasil penelitian ini didapatkan bebrapa teorema terkait dimensi metrik pada beberapa graf khusus.

Teorema 1. *Untuk $n \geq 2$, nilai dimensi metrik dan non-isolated resolving set graf tumpukan buku $B_{4,n}$ adalah $dim(B_{4,n})$ = 4 dan $nr(B_{4,n})$ = 5.*

Bukti. Graf tumpukan buku $(B_{4,n})$ merupakan graf konektif dengan himpunan titik $V(B_{4,n}) = \{x_{ij}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 5\}$ dan himpunan sisi $E(B_{4,n}) = \{x_{ij}x_{(i+1)j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 5\} \cup \{x_{ij}x_{(i+1)j}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq 5\} \cup \{x_{ij}x_{i(j+2)}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 3, j \in$ ganjil$\}$. Kardinalitas titik $|V(B_{4,n})| = 5n$ dan kardinalitas sisi $|E(B_{4,n})| = 9n - 5$.

Untuk $n \geq 2$, batas bawah $dim(B_{4,n}) \geq 3$, selanjutnya diperiksa apakah $dim(B_{4,n}) = 3$. Hal ini dapat ditunjukkan dengan menentukan himpunan $V(W) \subset V(S_4)$ atau $V(W) \subset V(P_n)$. Apabila diambil $V(W) \subset V(P_n)$ maka beberapa titik pada lintasan lainnya berpotensi memiliki representasi yang sama. Sebaliknya bila diambil $V(W) \subset V(S_4)$ maka dapat dilihat dalam ilustrasi Figure 1.

Representasi titik $x \in B_{4,5}$ terhadap W adalah sebagai berikut:

$r(x_{11}\|W) = (0,1,2)$	$r(x_{12}\|W) = (2,1,2)$	$r(x_{13}\|W) = (1,0,1)$
$r(x_{21}\|W) = (1,2,3)$	$r(x_{22}\|W) = (3,2,3)$	$r(x_{23}\|W) = (2,1,2)$
$r(x_{31}\|W) = (2,3,4)$	$r(x_{32}\|W) = (4,3,4)$	$r(x_{33}\|W) = (3,2,3)$
$r(x_{41}\|W) = (3,4,5)$	$r(x_{32}\|W) = (5,4,5)$	$r(x_{43}\|W) = (4,3,4)$
$r(x_{51}\|W) = (4,5,6)$	$r(x_{32}\|W) = (6,5,6)$	$r(x_{23}\|W) = (5,4,5)$

$r(x_{14}\|W) = (2,1,2)$	$r(x_{15}\|W) = (2,1,0)$
$r(x_{24}\|W) = (3,2,3)$	$r(x_{25}\|W) = (3,2,1)$
$r(x_{34}\|W) = (4,3,4)$	$r(x_{35}\|W) = (4,3,2)$
$r(x_{44}\|W) = (5,4,5)$	$r(x_{45}\|W) = (5,4,3)$

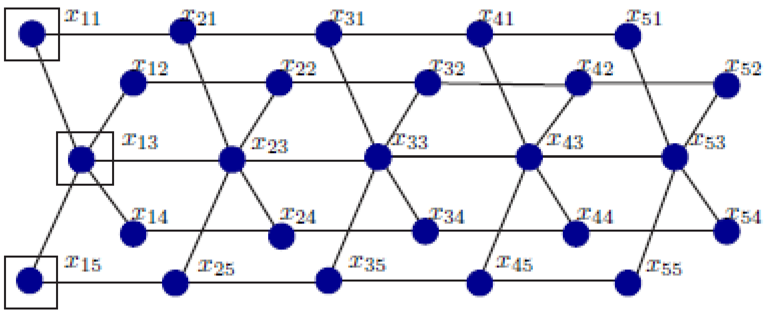

Figure 1: Contoh Dimensi Metrik Graf $B_{4,5}$

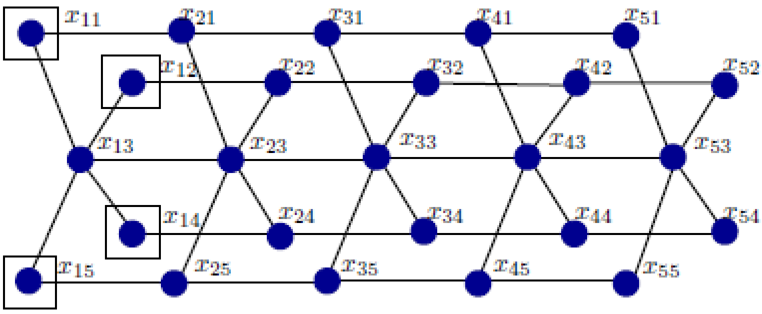

Figure 2: Dimensi Metrik Graf $B_{4,5}$

$r(x_{54}|W) = (6, 5, 6)$ $\quad$ $r(x_{55}|W) = (6, 5, 4)$
Dapat dilihat bahwa setiap titik graf $B_{4,5}$ memiliki representasi yang sama terhadap W, salah satunya yaitu $r(x_{12}|W) = (2, 1, 2) = r(x_{14}|W)$ sehingga kardinalitas himpunan pembeda graf $B_{4,n} \neq 3$.

Dengan demikian batas bawah yang lebih baik adalah $dim(B_{4,n}) \geq 4$. Akan dibuktikan $dim(B_{4,n}) \leq 4$ dengan menentukan himpunan pembeda $W = \{x_{1i}; 1 \leq i \leq 5; i \neq 3\}$. Namun apabila ditentukan himpunan pembeda yang terhubung langsung yaitu $W = \{x_{1i}; i \text{ adalah empat dari } 1 \leq i \leq 5\}$ maka beberapa titik pada graf bintangnya berpotensi memiliki representasi yang sama terhadap himpunan pembeda tersebut. Sehingga himpunan pembeda yang dipilih adalah $W = \{x_{1i}; 1 \leq i \leq 5; i \neq 3\}$, dan representasi titik $x \in B_{4,n}$ yang kita pilih adalah :
$r(x_{ij}|W) = (i-1, i+1, i+1, i+1); 1 \leq i \leq n+1; j = 1,$
$r(x_{ij}|W) = (i+1, i-1, i+1, i+1); 1 \leq i \leq n+1; j = 2,$
$r(x_{ij}|W) = (i, i, i, i); 1 \leq i \leq n+1; j = 3,$
$r(x_{ij}|W) = (i+1, i+1, i-1, i+1); 1 \leq i \leq n+1; j = 4,$
$r(x_{ij}|W) = (i+1, i+1, i+1, i-1); 1 \leq i \leq n+1; j = 5.$

Dapat dilihat bahwa setiap titik graf $B_{4,n}$ memiliki representasi berbeda terhadap W, sehingga kardinalitas himpunan pembeda graf $B_{4,n}$ yang terpilih adalah $|W| = 4$ atau $dim(B_{4,n}) \leq 4$. Dengan demikian $dim(B_{4,n}) = 4$ untuk $n \geq 2$. Lihat Figure 2 untuk ilustrasi.

Representasi titik $x \in B_{4,5}$ terhadap W adalah sebagai berikut:
$r(x_{11}|W) = (0, 2, 2, 2)$ $\quad$ $r(x_{12}|W) = (2, 0, 2, 2)$ $\quad$ $r(x_{13}|W) = (1, 1, 1, 1)$
$r(x_{21}|W) = (1, 3, 3, 3)$ $\quad$ $r(x_{22}|W) = (3, 1, 3, 3)$ $\quad$ $r(x_{23}|W) = (2, 2, 2, 2)$
$r(x_{31}|W) = (2, 4, 4, 4)$ $\quad$ $r(x_{32}|W) = (4, 2, 4, 4)$ $\quad$ $r(x_{33}|W) = (3, 3, 3, 3)$

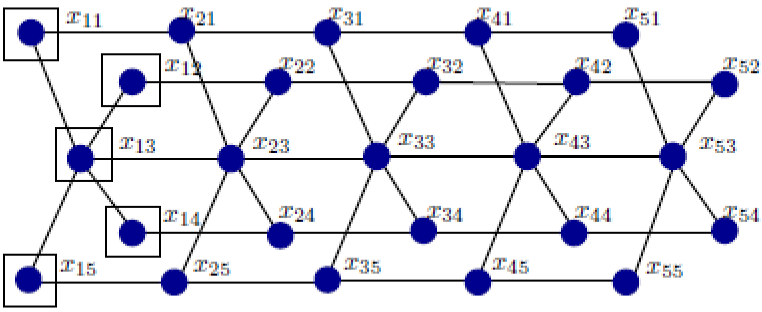

Figure 3: $nr(B_{4,5})$

$r(x_{41}|W) = (3,5,5,5)$ $r(x_{42}|W) = (5,3,5,5)$ $r(x_{43}|W) = (4,4,4,4)$
$r(x_{51}|W) = (4,6,6,6)$ $r(x_{52}|W) = (6,4,6,6)$ $r(x_{53}|W) = (5,5,5,5)$

$r(x_{14}|W) = (2,2,0,2)$ $r(x_{15}|W) = (2,2,2,0)$
$r(x_{24}|W) = (3,3,1,3)$ $r(x_{25}|W) = (3,3,3,1)$
$r(x_{34}|W) = (4,4,2,4)$ $r(x_{35}|W) = (4,4,4,2)$
$r(x_{44}|W) = (5,5,3,5)$ $r(x_{45}|W) = (5,5,5,3)$
$r(x_{54}|W) = (6,6,4,6)$ $r(x_{55}|W) = (6,6,6,4)$

Selanjutnya akan ditunjukkan nilai nr dari graf $B_{4,n}$. Berdasarkan Observasi 1 menyatakan bahwa $nr(B_{4,n}) \geq dim(B_{4,n})$. Sehingga $nr(B_{4,n}) \geq dim(B_{4,n}) = 4$, namun $nr(B_{4,n}) \neq 4$ karena tidak memenuhi sifat *non-isolated resolving set*, lihat himpunan pembeda Gambar 2 bahwa $W = \{x_{1i}; 1 \leq i \leq 5; i \neq 3\}$ mengandung titik - titik yang tidak terkoneksi satu sama lain. Dengan demikian batas bawah yang lebih baik adalah $nr(B_{4,n}) \geq 5$. Kemudian akan dibuktikan $nr(B_{4,n}) \leq 5$ dengan menentukan himpunan pembeda $W' = \{x_{ij}; i = 1; 1 \leq j \leq 5\}$. Representasi titik $x \in B_{4,n}$ terhadap W' adalah sebagai berikut:

$r(x_{ij}|W') = (i-1, i+1, i+1, i+1, i); 1 \leq i \leq n+1; j = 1,$
$r(x_{ij}|W') = (i+1, i-1, i+1, i+1, i; 1 \leq i \leq n+1; j = 2,$
$r(x_{ij}|W') = (i, i, i, i, i-1); 1 \leq i \leq n+1; j = 3,$
$r(x_{ij}|W') = (i+1, i+1, i-1, i+1, i); 1 \leq i \leq n+1; j = 4,$
$r(x_{ij}|W') = (i+1, i+1, i+1, i-1, i); 1 \leq i \leq n+1; j = 5.$

Dapat dilihat bahwa setiap titik graf $B_{4,n}$ memiliki representasi berbeda terhadap W', dan seluruh $x \in W'$ terhubung dalam W' sehingga kardinalitas himpunan pembeda graf $B_{4,n}$ yang terpilih adalah $|W'| = 5$ atau $nr(B_{4,n}) \leq 5$. Dengan demikian $nr(B_{4,n}) = 5$ untuk $n \geq 2$. Sebagai ilustrasi lihat Figure 3.

Representasi titik $x \in B_{4,5}$ terhadap W' adalah sebagai berikut:

$r(x_{11}|W) = (0,2,2,2,1)$ $r(x_{12}|W) = (2,0,2,2,1)$ $r(x_{13}|W) = (1,1,1,1,0)$
$r(x_{21}|W) = (1,3,3,3,2)$ $r(x_{22}|W) = (3,1,3,3,2)$ $r(x_{23}|W) = (2,2,2,2,1)$
$r(x_{31}|W) = (2,4,4,4,3)$ $r(x_{32}|W) = (4,2,4,4,3)$ $r(x_{33}|W) = (3,3,3,3,2)$
$r(x_{41}|W) = (3,5,5,5,4)$ $r(x_{42}|W) = (5,3,5,5,4)$ $r(x_{43}|W) = (4,4,4,4,3)$
$r(x_{51}|W) = (4,6,6,6,5)$ $r(x_{52}|W) = (6,4,6,6,5)$ $r(x_{53}|W) = (5,5,5,5,4)$

$r(x_{14}|W) = (2,2,0,2,1)$ $r(x_{15}|W) = (2,2,2,0,1)$
$r(x_{24}|W) = (3,3,1,3,2)$ $r(x_{25}|W) = (3,3,3,1,2)$

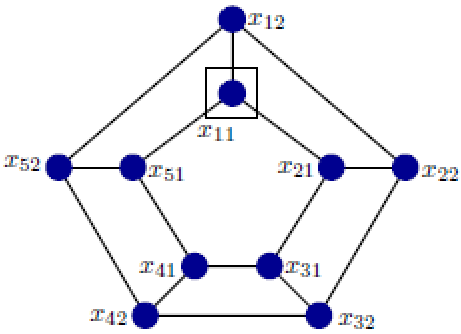

Figure 4: Contoh Dimensi Metrik Graf $H_{5,2}$

$r(x_{34}|W) = (4, 4, 2, 4, 3)$ $r(x_{35}|W) = (4, 4, 4, 2, 3)$
$r(x_{44}|W) = (5, 5, 3, 5, 4)$ $r(x_{45}|W) = (5, 5, 5, 3, 4)$
$r(x_{54}|W) = (6, 6, 4, 6, 5)$ $r(x_{55}|W) = (6, 6, 6, 4, 5)$

Teorema 2. *Untuk $n \geq 2$, nilai dimensi metrik dan non-isolated resolving set graf prisma $H_{5,n}$ adalah $dim(H_{5,n}) = 2$ dan $nr(H_{5,n}) = 3$.*

Bukti. Graf $H_{5,n}$ adalah graf konektif dengan himpunan titik $V(H_{5,n}) = \{x_{ij}; 1 \leq i \leq 5, 1 \leq j \leq n\}$, dan himpunan sisi $E(H_{5,n}) = \{x_{ij}x(i+1)j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 5\} \cup \{x_{ij}x_{i(j+1)}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 4\} \cup \{x_{i1}x_{i5}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 4\}$. Kardinalitas titik $|V(H_{5,n})| = 5n$ dan kardinalitas sisi $|E(H_{5,n})| = 10n - 5$.

Untuk $n \geq 2$, batas bawah $dim(H_{5,n}) \geq 1$, selanjutnya diperiksa apakah $dim(H_{5,n}) = 1$. Hal ini dapat ditunjukkan dengan menentukan himpunan $V(W) \subset V = \{x_{i1}\}$ atau $V(W) \subset V = \{x_{i2}\}$ atau $V(W) \subset V = \{x_{ij}\}$. Apabila diambil $V(W) \subset V = \{x_{i2}\}$ atau $V(W) \subset V = \{x_{ij}\}$ maka beberapa titik - titik lainnya berpotensi memiliki representasi yang sama. Apabila diambil $V(W) \subset V = \{x_{i1}\}$ maka dapat dilihat dalam ilustrasi Figure 4.

Representasi titik $x \in H_{5,2}$ terhadap W adalah sebagai berikut:
$r(x_{11}|W) = (0)$ $r(x_{12}|W)) = (1)$
$r(x_{21}|W) = (1)$ $r(x_{22}|W)) = (2)$
$r(x_{31}|W) = (2)$ $r(x_{32}|W)) = (3)$
$r(x_{41}|W) = (2)$ $r(x_{42}|W)) = (3)$
$r(x_{51}|W) = (1)$ $r(x_{52}|W)) = (2)$

Dapat dilihat bahwa setiap titik graf $r(x_{21}|W)) = (1)$ memiliki representasi yang sama terhadap W, salah satunya adalah pada titik $r(x_{21}|W) = (1) = r(x_{12}|W))$. Oleh sebab itu kardinalitas himpunan pembeda graf $H_{5,n} \neq 3$.

Dengan demikian batas bawah yang lebih baik adalah $dim(H_{5,n}) \geq 2$. Akan dibuktikan $dim(H_{5,n}) \leq 2$ dengan menentukan himpunan pembeda $W = \{x_{11}x_{13}\}$. Namun apabila ditentukan himpunan pembeda yang terhubung langsung yaitu $W = \{x_{i1}; i \text{ adalah dua dari } 1 \leq i \leq 5\}$ atau $W = \{x_{i2}; i \text{ adalah dua dari } 1 \leq i \leq 5\}$ maka beberapa titik - titik yang lainnya berpotensi memiliki representasi yang sama terhadap himpunan pembeda tersebut. Sehingga himpunan pembeda yang dipilih adalah $W = \{x_{11}x_{31}\}$, dan representasi titik $x \in H_{5,n}$ terhadap W adalah sebagai berikut:

$r(x_{ij}|W) = (i-1, i+1); 1 \leq i \leq n, j = 1$
$r(x_{ij}|W) = (i, i); 1 \leq i \leq n, j = 2$
$r(x_{ij}|W) = (i+1, i-1); 1 \leq i \leq n, j = 3$

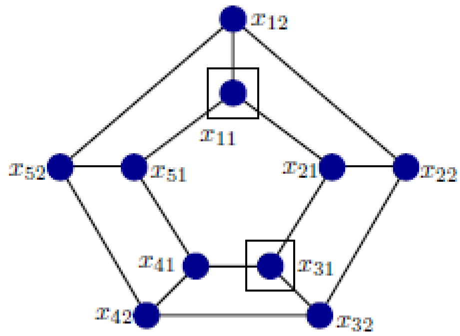

Figure 5: Dimensi Metrik Graf $H_{5,2}$

$r(x_{ij}|W) = (i+1, i); 1 \leq i \leq n, j = 4$
$r(x_{ij}|W) = (i, i+1); 1 \leq i \leq n, j = 5$

Dapat dilihat bahwa setiap titik graf $H_{5,2}$ memiliki representasi berbeda terhadap W, sehingga kardinalitas himpunan pembeda graf $H_{5,n}$ yang terpilih adalah $|W| = 2$ atau $dim(H_{5,n}) \leq 2$. Dengan demikian $dim(H_{5,n}) = 2$ untuk $n \geq 2$. Lihat Figure 5 untuk ilustrasi.

Representasi titik $x \in H_{5,2}$ terhadap W adalah sebagai berikut:

$r(x_{11}\|W) = (0, 2)$	$r(x_{12}\|W)) = (1, 3)$
$r(x_{21}\|W) = (1, 1)$	$r(x_{22}\|W)) = (2, 2)$
$r(x_{31}\|W) = (2, 0)$	$r(x_{32}\|W)) = (3, 1)$
$r(x_{41}\|W) = (2, 1)$	$r(x_{42}\|W)) = (3, 2)$
$r(x_{51}\|W) = (1, 2)$	$r(x_{52}\|W)) = (2, 3)$

Selanjutnya akan ditunjukkan nilai nr dari graf $H_{5,n}$. Berdasarkan Observasi 1 menyatakan bahwa $nr(H_{5,n}) \geq dim(H_{5,n})$. Sehingga $nr(H_{5,n}) \geq dim(H_{5,n}) = 2$, namun $nr(H_{5,n}) \neq 2$ karena tidak memenuhi sifat *non-isolated resolving set*, lihat Gambar 5, bahwa $W = \{x_{11}x_{13}\}$ mengandung titik - titik yang tidak terkoneksi satu sama lain. Dengan demikian batas bawah yang lebih baik adalah $nr(H_{5,n}) \geq 3$. Kemudian akan dibuktikan $nr(H_{5,n}) \leq 3$ dengan menentukan himpunan pembeda $W' = \{x_{i1}; 1 \leq i \leq 3\}$. Representasi titik $x \in H_{5,n}$ terhadap W' adalah sebagai berikut:

$r(x_{ij}|W) = (i-1, i, i+1); 1 \leq i \leq n, j = 1$
$r(x_{ij}|W) = (i, i-1, i); 1 \leq i \leq n, j = 2$
$r(x_{ij}|W) = (i+1, i, i-1); 1 \leq i \leq n, j = 3$
$r(x_{ij}|W) = (i+1, i+1, i); 1 \leq i \leq n, j = 4$
$r(x_{ij}|W) = (i, i+1, i+1); 1 \leq i \leq n, j = 5$

Dapat dilihat bahwa setiap titik graf $H_{5,n}$ memiliki representasi yang berbeda terhadap W', dan seluruh $x \in W'$ terhubung dalam W', sehingga kardinalitas himpunan pembeda graf $H_{5,n}$ yang terpilih adalah $|W'| = 3$ atau $nr(H_{5,n}) \leq 3$ untuk $n \geq 2$. Dengan demikian $nr(H_{5,n}) = 3$ untuk $n \geq 3$. Sebagai ilustrasi lihat Figure 6.

Representasi titik $x \in H_{5,2}$ terhadap W' adalah sebagai berikut:

$r(x_{11}\|W) = (0, 1, 2)$	$r(x_{21}\|W)) = (1, 2, 3)$
$r(x_{12}\|W) = (1, 0, 1)$	$r(x_{22}\|W)) = (2, 1, 2)$
$r(x_{13}\|W) = (2, 1, 0)$	$r(x_{23}\|W)) = (3, 2, 1)$
$r(x_{14}\|W) = (2, 2, 1)$	$r(x_{24}\|W)) = (3, 3, 2)$
$r(x_{15}\|W) = (1, 2, 2)$	$r(x_{25}\|W)) = (2, 3, 3)$

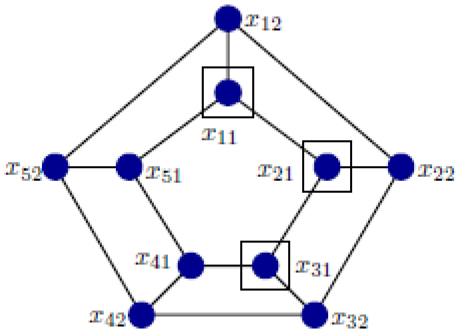

Figure 6: $nr(H_{5,2})$

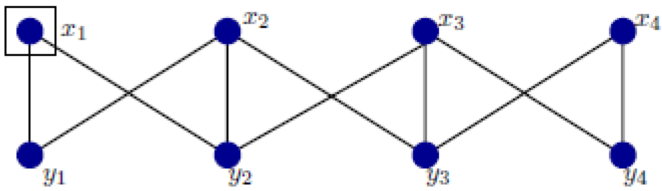

Figure 7: Contoh Dimensi Metrik Graf $shack(H_2^2, e, 3)$

Teorema 3. *Untuk $n \geq 2$, nilai dimensi metrik dan non-isolated resolving set graf shack(H_2^2, e, n) adalah $dim(shack(H_2^2, e, n)) = 2$ dan $nr(shack(H_2^2, e, n)) = 2$.*

Bukti. Graf $shack(H_2^2, e, n)$ adalah graf konektif dengan himpunan titik $V(shack(H_2^2, e, n)) = \{x_i; 1 \leq i \leq n+1\} \cup \{y_i;\ 1 \leq i \leq n+1\}$, dan himpunan sisi $E(shack(H_2^2, e, n)) = \{x_i y_i; 1 \leq i \leq n+1\} \cup \{x_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_{i+1} y_i; 1 \leq i \leq n\}$. Kardinalitas titik $|V(shack(H_2^2, e, n))| = 2n+2$ dan kardinalitas sisi $|E(shack(H_2^2, e, n))| = 3n+1$.

Untuk $n \geq 2$, batas bawah $dim(shack(H_2^2, e, n)) \geq 1$, selanjutnya diperiksa apakah $dim(shack(H_2^2, e, n)) = 1$. Hal ini dapat ditunjukkan dengan menentukan himpunan $V(W) \subset V = \{x_i\}$ atau $V(W) \subset V = \{y_i\}$. Apabila diambil $V(W) \subset V = \{y_i\}$ maka beberapa titik - titik lainnya berpotensi memiliki representasi yang sama. Sedangkan apabila diambil $V(W) \subset V = \{x_i\}$ maka dapat dilihat dalam ilustrasi Figure 7.
Representasi titik $x, y \in shack(H_2^2, e, 3)$ terhadap W adalah sebagai berikut:
$r(x_1|W) = (0)$ $\quad$ $r(y_1|W) = (1)$
$r(x_2|W) = (2)$ $\quad$ $r(y_2|W) = (1)$
$r(x_3|W) = (4)$ $\quad$ $r(y_3|W) = (3)$
$r(x_4|W) = (6)$ $\quad$ $r(y_4|W) = (3)$
Dapat dilihat bahwa setiap titik graf $shack(H_2^2, e, 3)$ memiliki representasi yang sama terhadap W, salah satunya yaitu $r(y_1|W) = (1) = r(y_2|W)$, sehingga kardinalitas himpunan pembeda graf $shack(H_2^2, e, n) \neq 1$.

Dengan demikian batas bawah yang lebih baik adalah $dim(shack(H_2^2, e, n)) \geq 2$. Akan dibuktikan $dim(shack(H_2^2, e, n)) \leq 2$ dengan menentukan himpunan pembeda $W = \{x_1, y_1\}$. Representasi titik $x, y \in shack(H_2^2, e, n)$ terhadap W adalah sebagai berikut:
$r(x_i|W) = (i-1, i); i \in ganjil$ $\quad$ $r(y_i|W) = (i, i-1); i \in ganjil$
$r(x_i|W) = (i, i-1); i \in genap$ $\quad$ $r(y_i|W) = (i-1, i); i \in genap$

Dapat dilihat bahwa setiap titik graf $shack(H_2^2, e, n)$ memiliki representasi yang berbeda terhadap W, sehingga kardinalitas himpunan pembeda yang terpilih adalah $|W| = 2$ atau

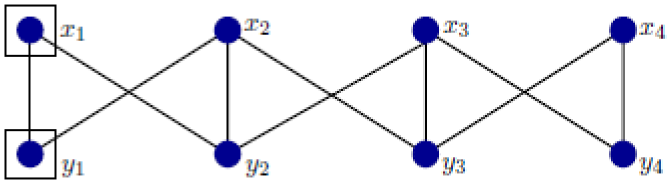

Figure 8: Dimensi Metrik dan nr Graf $shack(H_2^2, e, 3)$

$dim(shack(H_2^2, e, n)) \leq 2$. Dengan demikian $dim(shack(H_2^2, e, n)) = 2$ untuk $n \geq 2$. Karena W sudah terbukti maka $dim(shack(H_2^2, e, n)) = nr(shack(H_2^2, e, n))$ untuk $n \geq 2$, sebagai ilustrasi lihat Figure 8.
Representasi titik $x, y \in shack(H_2^2, e, 3)$ terhadap W adalah sebagai berikut:
$r(x_1|W) = (0, 1)$ $\quad$ $r(y_1|W) = (1, 0)$
$r(x_2|W) = (2, 1)$ $\quad$ $r(y_2|W) = (1, 2)$
$r(x_3|W) = (2, 3)$ $\quad$ $r(y_3|W) = (3, 2)$
$r(x_4|W) = (4, 3)$ $\quad$ $r(y_4|W) = (3, 4)$

Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian diatas, maka kita dapat menyimpulkan bahwa

1. $dim(B_{4,n})$ = 4 dan $nr(B_{4,n})$ = 5 untuk $n \geq 2$;
2. $$dim(G_n) = \begin{cases} 3 \text{ , untuk } 3 \leq n \leq 4 \\ n - 1 \text{ , untuk } n \geq 5 \end{cases}$$
   dan
   $$nr(G_n) = \begin{cases} 3 \text{ , untuk } 3 \leq n \leq 4 \\ n \text{ , untuk } n \geq 5; \end{cases}$$
3. $dim(shack(H_2^2, e, n)) = 2$ dan $nr(shack(H_2^2, e, n)) = 2$ untuk $n \geq 2$.

Masalah terbuka 1 *Tentukan dimensi metrik dan non-isolated resolving dari graf khusus lain beserta operasinya.*

Referensi

[1] Chitra, P. J. B dan Arumugam, S. 2010 *Resolving Sets Without Isolated Vertices*. Kalasalingan University: India.

[2] Harary, F dan Melter, R. A. 1976. On The Metric Dimension of Graph. *Ars Combin.* **2**(1):191-195.

[3] Iswadi, H. 2011. Batas Atas Bilangan Dominasi Lokasi Metrik Graf Hasil Operasi Korona. *Prosiding Seminar Nasional Teknologi Informasi dan Multimedia 2011 (SNASTIA 2011)*. 1-5.

[4] Munir, R. 2009. *Matematika Diskrit Edisi 3*. Bandung: Informatika Bandung.

[5] Purwono, J. A. 2009. *Dimensi Metrik Pada Pengembangan Graph Kincir dengan Pola* $K_1 + mK_n$. Tugas Akhir. Jurusan Matematika ITS : Surabaya.

[6] Santi, R. N. 2015. *Analisa Dimensi Metrik Pada Beberapa Graf Khusus*. Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember.